

Contrôle de mathématiques

Lycée : Louise Michel	Classe.....	Date : 05/05/17		
Nom :				
Prénom :				
Acquises	En cours	Non Acquises	CAPACITÉS	Score
			Connaître la dérivée, les variations de logarithme népérien	/ 9
			Déterminer des primitives, calculer des intégrales	/11
			Total :	/20

Exercice 1

Une entreprise fabrique et vend des matelas. La production hebdomadaire varie entre **500** et **4 000** pièces.

Une étude montre que le bénéfice total de l'entreprise est nul lorsqu'elle produit et vend **1 000** matelas.

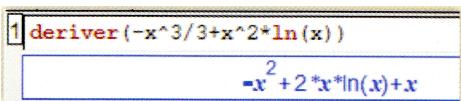
De plus, lorsque x milliers de matelas sont produits et vendus chaque semaine, le bénéfice marginal réalisé par l'entreprise, en centaine de milliers d'euros est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$ par : $f(x) = 3 - 2x + 2 \ln x$.

En économie, la fonction bénéfice marginal peut être assimilée à la dérivée de la fonction bénéfice total.

Partie A : Étude du bénéfice marginal

- 1 Calculer $f'(x)$.
- 2 Étudier le signe $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
 - a. Déterminer les extrêmes de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
 - b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
Déterminer une valeur arrondie de α au millième.
 - c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.

Partie B : Étude du bénéfice total

- 1 Montrer que la fonction G définie sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$ par $G(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.
- 2 On note B le bénéfice total de l'entreprise, en centaine de milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend chaque semaine entre 500 et 4 000 matelas.
 - a. Par lecture de l'énoncé, déterminer $B(1)$.
 - b. Déterminer une primitive de la fonction f de la partie A sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
 - c. En déduire la fonction B
- 3 Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
 - a. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle $[3 ; 4]$.
 - b. Déterminer la valeur approchée par défaut au millième de β .
- 4 a. Déterminer la quantité que doit produire et vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal.
Quel est le montant du bénéfice maximal ?
b. Déterminer la quantité que doit produire et vendre l'entreprise chaque semaine pour ne pas être déficitaire.
- 5 a. Calculer $B''(x)$.
b. Étudier la convexité de la fonction B sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$.
c. La courbe de la fonction B admet-elle des points d'inflexion sur l'intervalle $[0, 5 ; 4]$? Si oui, déterminer leurs coordonnées.
d. Interpréter les résultats des questions b. et c. ci-dessus dans le contexte de l'exercice.
- 6 Une capture d'écran d'un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant que l'on ne démontrera pas :
 

- 7 a. Calculer l'intégrale $\int_1^{3,5} B(x) dx$.

- b. En déduire la valeur moyenne du bénéfice total lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 3 500 articles.

REPONDRE AUX QUESTIONS A PARTIR D'ICI

