

# Contrôle de mathématiques

Lycée : <b>Louise Michel</b>			Classe.....	Date : <b>05/05/17</b>
Nom : .....				
Prénom : .....				
Acquises	En cours	Non Acquises	CAPACITÉS	Score
			Connaître la dérivée, les variations de logarithme népérien	/ 9
			Déterminer des primitives, calculer des intégrales	/11
Total :				<b>/20</b>

## Exercice 1

Une entreprise fabrique et vend des matelas. La production hebdomadaire varie entre **500** et **4 000** pièces.

Une étude montre que le bénéfice total de l'entreprise est nul lorsqu'elle produit et vend **1 000** matelas.

De plus, lorsque  $x$  milliers de matelas sont produits et vendus chaque semaine, le bénéfice marginal réalisé par l'entreprise, en centaine de milliers d'euros est donné par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$  par :  $f(x) = 3 - 2x + 2 \ln x$ .

En économie, la fonction bénéfice marginal peut être assimilée à la dérivée de la fonction bénéfice total.

### Partie A : Étude du bénéfice marginal

- 1** Calculer  $f'(x)$ .
- 2** Étudier le signe  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et en déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .
- 3**
  - a. Déterminer les extremums de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .
  - b. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .  
Déterminer une valeur arrondie de  $\alpha$  au millième.
  - c. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .

### Partie B : Étude du bénéfice total

- 1** Montrer que la fonction  $G$  définie sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$  par  $G(x) = x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien.
- 2** On note  $B$  le bénéfice total de l'entreprise, en centaine de milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend chaque semaine entre 500 et 4 000 matelas.
  - a. Par lecture de l'énoncé, déterminer  $B(1)$ .
  - b. Déterminer une primitive de la fonction  $f$  de la **partie A** sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .
  - c. En déduire la fonction  $B$
- 3** Étudier les variations de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .
- 4**
  - a. Montrer que l'équation  $B(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  sur l'intervalle  $[3 ; 4]$ .
  - b. Déterminer la valeur approchée par défaut au millième de  $\beta$ .
- 5**
  - a. Déterminer la quantité que doit produire et vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice maximal.  
Quel est le montant du bénéfice maximal ?
  - b. Déterminer la quantité que doit produire et vendre l'entreprise chaque semaine pour ne pas être déficitaire.
- 6**
  - a. Calculer  $B''(x)$ .
  - b. Étudier la convexité de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$ .
  - c. La courbe de la fonction  $B$  admet-elle des points d'inflexion sur l'intervalle  $[0, 5 ; 4]$  ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.
  - d. Interpréter les résultats des question **b.** et **c.** ci-dessus dans le contexte de l'exercice.
- 7** Une capture d'écran d'un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant que l'on ne démontrera pas :

1 **deriver**  $(-x^3/3 + x^2 \ln(x))$   
 $-x^2 + 2 \cdot x \cdot \ln(x) + x$

- a. Calculer l'intégrale  $\int_1^{3,5} B(x) dx$ .
- b. En déduire la valeur moyenne du bénéfice total lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 3 500 articles.

**REPONDRE AUX QUESTIONS A PARTIR D'ICI**



