

Contrôle de mathématiques

Exercice 1

On considère les matrices ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,5 \\ -15 & 7 & 14 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.) Calculer A^2 et A^3 .
2.) Montrer que $A^3 - 6A^2 + 12A = 8I_3$.
3.) En déduire que A est inversible et montrer que A^{-1} s'exprime sous la forme :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} (A^2 - 6A + 12I_3).$$
4.) Expliciter, à l'aide de ce qui précède, les coefficients de la matrice A^{-1} .

Vérifier ensuite avec la calculatrice.

5.) On admet que la matrice P est inversible.

À l'aide de la calculatrice, calculer $P^{-1}AP$. Quelle est la forme de la matrice obtenue ?

Exercice 2

Un créateur d'entreprises lance un réseau d'agences de services à domicile.

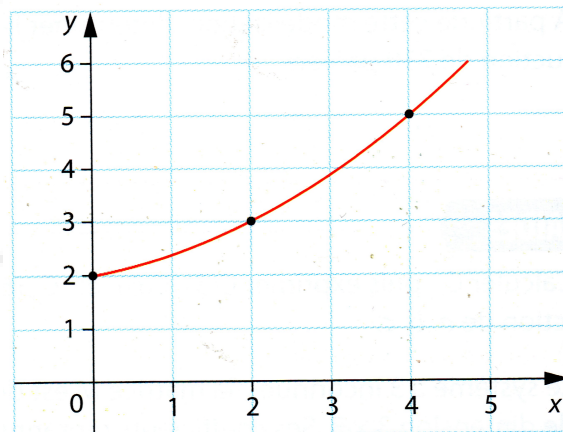
Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter.

Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1^{er} janvier 2010 est passée à 300 agences au 1^{er} janvier 2012 puis à 500 agences au 1^{er} janvier 2014.

On admet que le nombre d'agences peut être modélisé par une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels.

La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime, en centaines, le nombre d'agences.

Ci-contre est représentée la fonction f .



On cherche à déterminer la valeur des coefficients a , b et c .

1.)
 - (a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
 - (b) En déduire que le système précédent est équivalent à $\mathbf{MX} = \mathbf{R}$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et } R \text{ est une matrice que l'on précisera.}$$

2.)
 - (a) Déterminer M^{-1} à l'aide de la calculatrice.
 - (b) À l'aide de cette matrice, déterminer la valeur des coefficients a , b et c en détaillant les calculs.
3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1^{er} janvier 2021