

# Contrôle de mathématiques

## Exercice 1

On considère les matrices ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0,5 \\ -15 & 7 & 14 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. ) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .
2. ) Montrer que  $A^3 - 6A^2 + 12A = 8I_3$ .
3. ) En déduire que  $A$  est inversible et montrer que  $A^{-1}$  s'exprime sous la forme :  

$$A^{-1} = \frac{1}{8} (A^2 - 6A + 12I_3).$$
4. ) Expliciter, à l'aide de ce qui précède, les coefficients de la matrice  $A^{-1}$ . Vérifier ensuite avec la calculatrice.
5. ) On admet que la matrice  $P$  est inversible.

À l'aide de la calculatrice, calculer  $P^{-1}AP$ . Quelle est la forme de la matrice obtenue ?

## Exercice 2

Un créateur d'entreprises lance un réseau d'agences de services à domicile .

Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter.

Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2010 est passée à 300 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2012 puis à 500 agences au 1<sup>er</sup> janvier 2014.

On admet que le nombre d'agences peut être modélisé par une fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois nombres réels.

La variable  $x$  désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et  $f(x)$  exprime, en centaines, le nombre d'agences.

Ci-contre est représentée la fonction  $f$ .

On cherche à déterminer la valeur des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

1. )
  - (a) À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
  - (b) En déduire que le système précédent est équivalent à  $\mathbf{MX} = \mathbf{R}$  avec :
 
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
 et  $R$  est une matrice que l'on précisera.
2. )
  - (a) Déterminer  $M^{-1}$  à l'aide de la calculatrice.
  - (b) À l'aide de cette matrice, déterminer la valeur des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  en détaillant les calculs.
3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1<sup>er</sup> janvier 2021

