Contrôle de mathématiques

Exercice 1

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A.

1.) Calculer A^2.

   On admet que : $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2.) Vérifier, à la main et en détaillant vos calculs, que :

$$M^3 = M^2 + 8M + 6I$$

3.) Calculer, à la calculatrice, le produit :

$$M \times \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$$

   Que peut-on en déduire pour la matrice $\frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$?

Partie B.

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la courbe représentant la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.

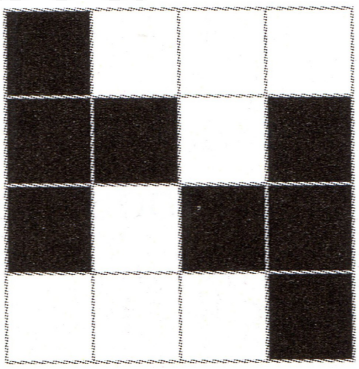
1.) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b, et c tels que : $M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.) Calculer les nombres a, b et c.

3.) Déterminer les variations de la fonction f sur $[-1;2]$

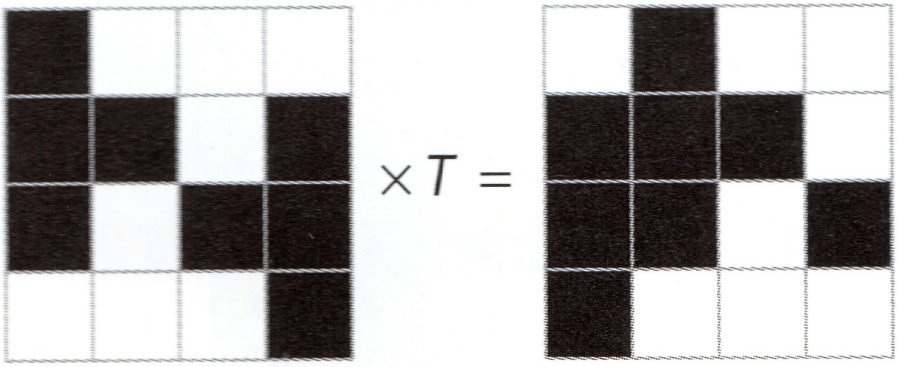
Exercice 2

Une image numérique est un tableau dans lequel chaque case, nommée pixel, contient une couleur.
On considère l'image en noir et blanc ci-contre de dimension 4×4.



1.) Construire la matrice associée à cette image où un pixel noir est représenté par un 0 et un pixel noir par un 1.

2.) On souhaite créer une matrice carrée **T** transformant la matrice A par produit qui a pour effet de décaler les colonnes de pixel vers la droite.



(a) Quelle dimension doit avoir la matrice T ?

(b) Expliquer pourquoi le produit de la première ligne de la matrice A par la première colonne de la matrice T doit donner $a_{1,4}$?

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{1,1} \\ t_{2,1} \\ t_{3,1} \\ t_{4,1} \end{pmatrix} = a_{1,4}$$

En déduire les valeurs des coefficients de la première colonne de T.

(c) Continuer cette démarche pour déterminer la matrice T.

(d) Calculer $A \times T^2$. Ce résultat était-il prévisible ?

(e) Pour toute image B noire et blanche de dimension 4×4, déterminer $B \times T^4$.